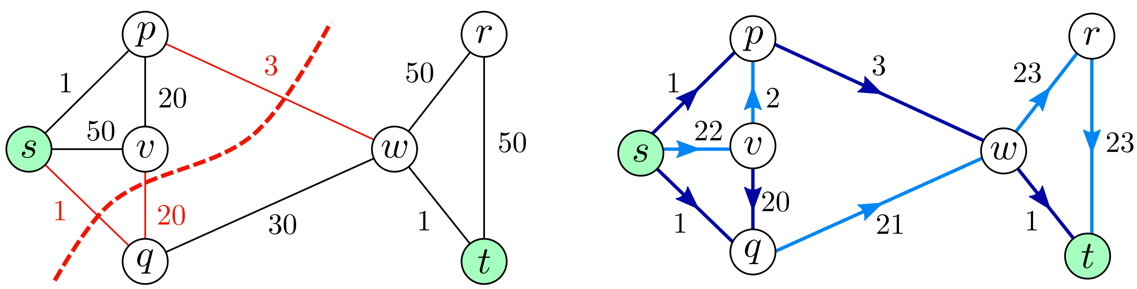
Variácie na tému rezy

Problém nájdenia minimálneho rezu v grafe, Min-Cut, by mal byť čitateľom dobre známy:

Definícia 1. Majme daný jednoduchý graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami, t.j. funkciou $\omega : E \mapsto \mathbb{R}^+$ a v ňom dvojicu vrcholov s, t. Cieľom problému Min-Cut je odobrať z grafu G množinu hrán s minimálnou celkovou váhou tak, aby vrcholy s a t neboli v rovnakom komponente súvislosti výsledného grafu.

Zaujímavá je spojitosť Min-Cut a Max-Flow: známa veta hovorí, že veľkosti minimálneho rezu a maximálneho toku sú rovnaké.



Minimálny rez a maximálny tok sú rovnaké.

Videli sme, že Max-Flow sa dá vyjadriť ako lineárny program, ktorého duálny program je relaxácia problému Min-Cut (v ktorej nevyberáme množinu hrán, ale každej hrane priradíme hodnotu z intervalu $[0, 1]$ a požadujeme, aby na každej $s - t$ ceste bol súčet hodnôt aspoň 1). Zároveň, pretože matica obmedzení tohto relaxovaného programu je totálne unimodulárna, vieme, že existuje celočíselné optimum. Efektívnu riešiteľnosť Min-Cut môžeme teda pripísať na vrub špeciálnemu tvaru matice príslušného lineárneho programu. Dalo by sa očakávať, že programy takéhoto tvaru sú skôr výnimkou a pre väčšinu problémov podobná min-max charakterizácia neplatí. V tomto texte chceme ilustrovať, že efektívne riešiteľné diskrétne optimalizačné problémy sú skôr výnimka ako pravidlo. Prezentujeme niekoľko zovšeobecnení Min-Cut, ktoré sú NP-ťažké a ukážeme aproximačné algoritmy na ich riešenie. Jedno zovšeobecnenie, v ktorom namiesto jednej dvojice vrcholov treba rozpojiť k dvojíc, sme už videli:

Definícia 2. Majme daný jednoduchý graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami, t.j. funkciou $\omega : E \mapsto \mathbb{R}^+$ a v ňom k dvojíc vrcholov (s_i, t_i), $i = 1, \ldots, k$. Cieľom problému Min-Multi-Cut je odobrať z grafu G množinu hrán s minimálnou celkovou váhou tak, aby žiadna dvojica (s_i, t_i) nebola v rovnakom komponente súvislosti výsledného grafu.

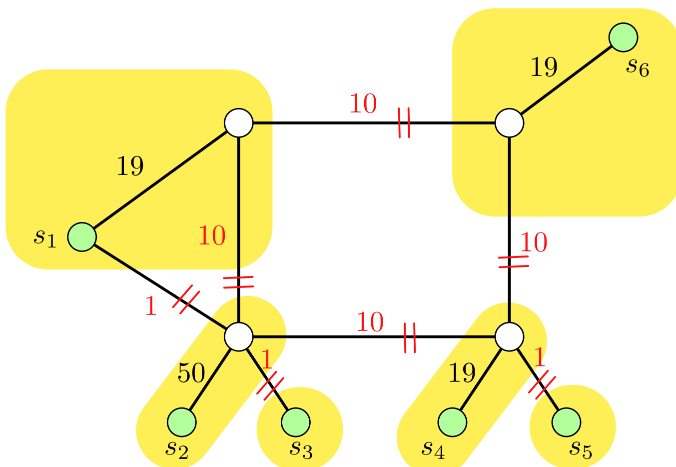
a ukázali sme $4 \ln(2k)$-aproximačný algoritmus.

Variácia prvá: MIN-MULTIWAY-CUT

Iné zovšeobecnenie nepožaduje rozpojiť konkrétne dvojice vrcholov, ale iba rozdeliť niekoľko daných význačných vrcholov (terminálov) do rôznych komponentov súvislosti:

Definícia 3. Majme daný jednoduchý graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami, t.j. funkciou $\omega : E \mapsto \mathbb{R}^+$ a v ňom k vrcholov $s_1, \ldots, s_k$. Cieľom problému MIN-MULTIWAY-CUT je odobrať z grafu G množinu hrán s minimálnou celkovou váhou tak, aby žiadne dva vrcholy s_i, s_j neboli v rovnakom komponente súvislosti výsledného grafu.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že vstupný graf je súvislý (inak každý komponent súvislosti môžme vyriešiť ako samostatnú inštanciu), a preto optimálne riešenie bude mať práve k komponentov (menej nemôže mať, lebo to by museli dva terminály byť v jednom komponente, a viac nebude mať kvôli minimalite).



Optimálne riešenie s cenou 43. Platí $\partial(C_1) = 21$, $\partial(C_2) = 22$, $\partial(C_3) = 1$, $\partial(C_4) = 21$, $\partial(C_5) = 1$, $\partial(C_6) = 20$.

Označme C_i komponent súvislosti optimálneho riešenia, ktorý obsahuje terminál s_i; nech $\partial(C_i)$ je veľkosť rezu, ktorý oddeľuje komponent C_i, t.j.

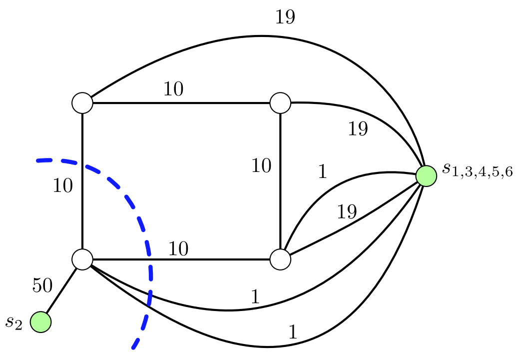
$$\partial(C_i) := \sum_{\substack{e=(u,v)\\ u\in C_i, v\notin C_i}} \omega(e). \tag{1}$$

Cena optimálneho riešenia je potom

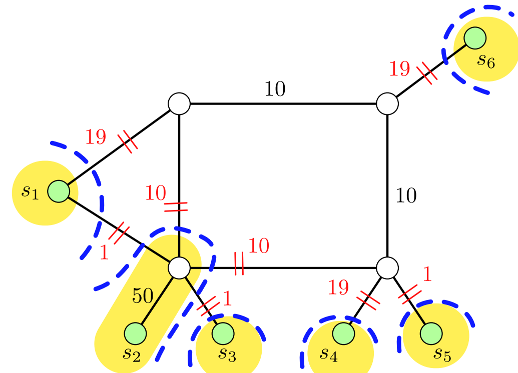
$$OPT = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \partial(C_i), \tag{2}$$

lebo každá hrana rezu je v sume na pravej strane zarátaná dvakrát. Ukážeme si $2(1-\frac{1}{k})$-aproximačný algoritmus, t.j. algoritmus, ktorý vždy nájde rez s hodnotou najviac $2(1-\frac{1}{k})$-násobku optima.

Zoberme si ľubovoľný terminál s_i. Označme D_i minimálny rez, ktorý oddeľuje s_i od ostatných terminálov a označme $\partial(D_i)$ jeho veľkosť. Rez D_i vieme pre každé i vypočítať ľahko: všetky ostatné terminály zlúčime do jedného vrchola a v takto získanom grafe zrátame minimálny rez.



Rez D_2 má veľkosť 22.



Veľkosti rezov sú $\partial(D_1) = 20$, $\partial(D_2) = 22$, $\partial(D_3) = 1$, $\partial(D_4) = 19$, $\partial(D_5) = 1$, $\partial(D_6) = 19$. Cena riešenia je 80.

Čo sa stane, ak za riešenie zoberieme zjednotenie rezov $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$? Každý rez C_i z optimálneho riešenia oddeľuje s_i od zvyšných terminálov. Keďže D_i je minimálny taký rez, je $\partial(D_i) \leq \partial(C_i)$. Zároveň pre cenu riešenia m platí

$$m \leq \sum_{i=1}^{k} \partial(D_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \partial(C_i) = 2 \cdot OPT,$$

kde posledná rovnosť je (2), a preto máme 2-aproximačný algoritmus. Zároveň hneď vidíme, ako ho trochu vylepšiť: prípustné riešenie dostaneme, ak urobíme zjednotenie hociktorých $k-1$ rezov D_i namiesto všetkých k. Prirodzenou voľbou je vynechať ten najťažší; nech je to D_j. Keďže je najťažší, z Dirichletovho princípu vyplýva, že musí byť aspoň tak ťažký ako priemer, t.j.

$$\partial(D_j) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \partial(D_i).$$

Pre cenu riešenia výsledného algoritmu potom dostávame

$$ALG \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \partial(D_i) = \sum_{i=1}^{k} \partial(D_i) - \partial(D_j) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^{k} \partial(D_i) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^{k} \partial(C_i) = 2\left(1 - \frac{1}{k}\right) OPT.$$

Variácia druhá: Min-k-Cut

Poslednou variáciou v tomto texte je modifikácia problému Min-Multiway-Cut, pri ktorej nemáme žiadne terminály a chceme iba graf rozdeliť na (aspoň) k častí:

Definícia 4. Majme daný jednoduchý graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami, t.j. funkciou $\omega : E \mapsto \mathbb{R}^+$ a číslo k. Cieľom problému Min-k-Cut je odobrať z grafu G množinu hrán s minimálnou celkovou váhou tak, aby výsledný graf mal aspoň k komponentov súvislosti.

Podotýkame, že k v názve problému je len symbol; počet častí, na ktoré treba rozkrájať graf, je súčasťou vstupu. Opäť ide o NP-ťažký problém a ukážeme si algoritmus s rovnakou garanciou aproximácie ako v predchádzajúcom prípade, t.j. $2\left(1 - \frac{1}{k}\right)$. Predstavíme pri tom aj dátovú štruktúru, ktorá môže byť zaujímavá sama osebe.

Gomory-Hu stromy

Predstavme si situáciu, že máme graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami a chceme pre každú dvojicu vrcholov u, v zrátať cenu minimálneho $u - v$ rezu. Priamočiary prístup je $\Omega(n^2)$-krát zavolať procedúru na výpočet minimálneho rezu. Dá sa to ale aj lepšie: v skutočnosti nám stačí $O(n)$ počítaní minimálneho rezu. Kľúčom je dátová štruktúra, ktorá efektívne kóduje minimálne rezy medzi všetkými dvojicami vrcholov, tzv. Gomory-Hu strom.

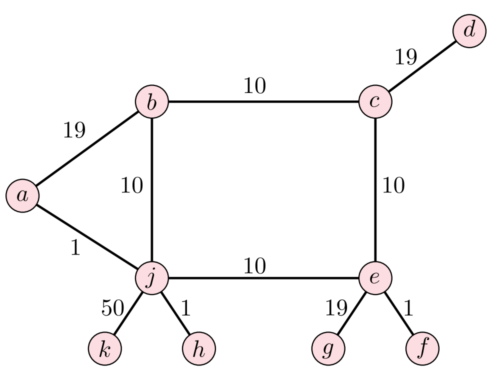
V ďalšom budeme používať nasledovné označenie:

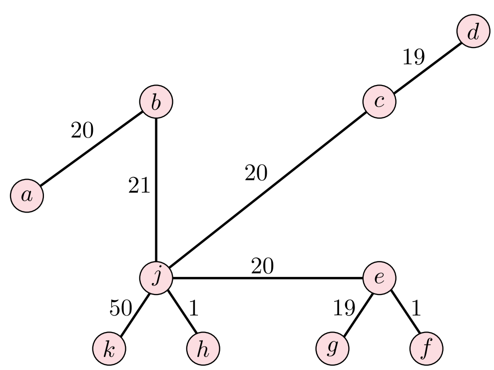
- Pre dva vrcholy $u, v \in V$, $f_G(u, v)$ (alebo len $f(u, v)$ ak je G zrejmé z kontextu), bude veľkosť minimálneho $u - v$ rezu v G.
- Ďalej, nech $T = (V, E)$ je strom a $e \in E$ je hrana. Po jej odstránení dostaneme graf $T - \{e\}$, ktorý má dva komponenty súvislosti. Označme $cut_T(e) \subseteq V$ jeden[1] z nich.
- Nech $G = (V, E)$ je graf. Tak ako v (1), pre množinu $S \subseteq V$ bude $\partial_G(S)$ (resp. $\partial(S)$, ak je G zrejmé) veľkosť rezu určeného množinou S (zjavne $\partial(S) = \partial(V - S)$).

Definícia 5. Majme daný jednoduchý graf $G = (V, E)$ s hranami ohodnotenými nezápornými váhami, t.j. funkciou $\omega : E \mapsto \mathbb{R}^+$. *Gomory-Hu strom* ku grafu G je strom $T = (V, E')$, s hranami ohodnotenými funkciou $\omega' : E' \mapsto \mathbb{R}^+$, ktorý spĺňa tieto vlastnosti:

1. $\forall e' \in E' : \ \omega'(e') = \partial_G(cut_T(e'))$
2. $\forall u, v \in V : \ f_G(u, v) = f_T(u, v)$

Definícia 5 nehovorí, ako taký strom skonštruovať (ani nehovorí, či je jednoznačný), ale iba to, že každý strom s danými vlastnosťami je Gomory-Hu strom. Čo vlastne v Definícii 5 požadujeme? Strom T má rovnakú množinu vrcholov ako G, ale hrany môže mať úplne iné (nijak nesúvisia s hranami G). Prvá vlastnosť hovorí, že ak by sme už poznali hrany E', ich váhy ω' vyrátame ľahko: pre každú hranu e' sa pozrieme, na aké množiny sa rozpadne T po odobratí e', a potom zrátame veľkosť rezu v G medzi týmito množinami. Napríklad na nasledujúcom obrázku je $cut_T((j, c)) = \{c, d\}$ a $\partial_G(\{c, d\}) = 20$ (z množiny $\{c, d\}$ odchádzajú hrany (b, c) a (e, c)).



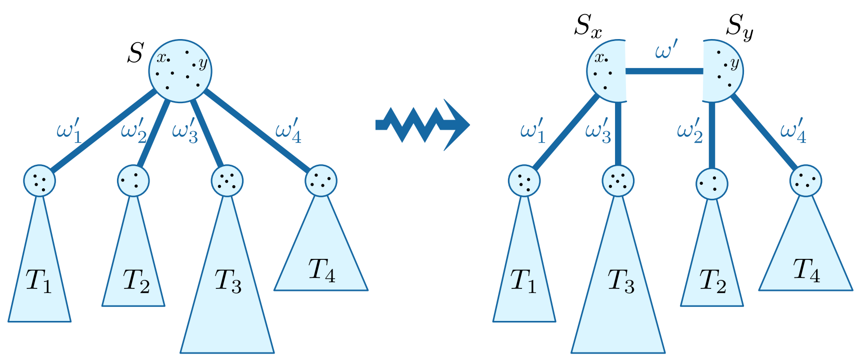


Graf G a jeho Gomory-Hu strom T.

[1] Aby sme mali jednoznačnú definíciu, potrebujeme povedať, ktorý komponent vyberieme. Keďže ale budeme hovoriť o veľkosti rezu medzi komponentami, je nám to jedno. Napríklad nech $cut_T(e)$ je menší z komponentov $T - \{e\}$ a v prípade rovnosti $cut_T(e)$ je ten komponent $T - \{e\}$, ktorý obsahuje nejaký pevne zvolený fixný vrchol v_0.

Druhá vlastnosť hovorí, že z T sa dajú vyčítať hodnoty minimálneho rezu medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi: $f_G(u,v)$, teda veľkosť minimálneho $u-v$ rezu v G, je $f_T(u,v)$: T je strom, takže obsahuje práve jednu $u-v$ cestu, a preto $f_T(u,v)$ je minimálna váha ω' na tejto ceste. Napríklad pre vrcholy a,k na obrázku je v T cesta $a-b-j-k$ a $f_T(a,k)=20$. Minimum sa nadobúda na hrane $a-b$ a $cut_T((a,b))=\{a\}$. Vskutku, rez $\{a\}$ s $\partial_G(\{a\})=20$ (kvôli hranám (a,b), (a,j)) je minimálny $a-k$ rez v G.

Poďme teraz ukázať algoritmus, ktorý vyrobí k danému grafu G jeho Gomory-Hu strom. Bude postupovať v iteráciách, pričom v každej iterácii t bude mať partíciu vrcholov $V=S_1^{(t)}\cup S_2^{(t)}\cup\cdots\cup S_{n_t}^{(t)}$, pričom $S_i^{(t)}\cap S_j^{(t)}=\emptyset$ pre $i\neq j$. Množiny $S_i^{(t)}$ budeme volať krabice. Na začiatku sú všetky vrcholy v jednej krabici, t.j. $n_0=1$, $S_1^{(0)}=V$. Na konci chceme, aby každá krabica obsahovala jeden vrchol; po skončení algoritmu môžeme preto jednoprvkové krabice stotožniť s príslušnými vrcholmi.
Na začiatku iterácie $t+1$ sú krabice pospájané stromom $T^{(t)}=\left(\left\{S_i^{(t)}\right\}_{i=1}^{n_t},E^{(t)}\right)$ s ohodnotenými hranami. Iterácia $t+1$ zoberie jednu krabicu $S=S_i^{(t)}$ a zakorení $T^{(t)}$ v S. Vyberie z S dva vrcholy x,y a rozdelí S na dve krabice S_x a S_y spojené hranou, pričom zvolí váhu pre novú hranu a vhodne prerozdelí podstromy. Cieľom je implementovať rozdeľovanie krabíc a prerozdeľovanie podstromov tak, aby po skončení algoritmu bol strom T Gomory-Hu strom pre graf G.



Počas behu algoritmu bude platiť nasledovný invariant:

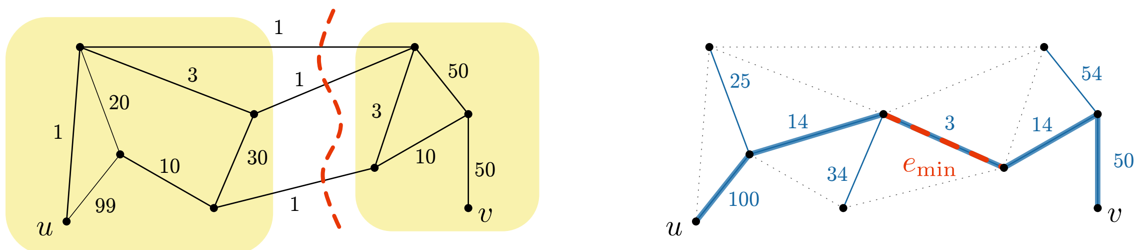
> **Invariant:** Nech $e\in E^{(t)}$ je ľubovoľná hrana v strome $T^{(t)}$, $e=\left(S_i^{(t)},S_J^{(t)}\right)$, potom $cut_{T^{(t)}}(e)$ je množina krabíc v jednom komponente $T^{(t)}-\{e\}$. Nech M sú vrcholy grafu G z týchto krabíc, t.j. $M:=\{v\in V\mid \exists S\in cut_{T^{(t)}}(e):\ v\in S\}$. Potom existujú dvaja *svedkovia* $x\in S_i^{(t)}$, $y\in S_j^{(t)}$, že $\omega'(e)=f_G(x,y)$ a M je minimálny $x-y$ rez v G.

Inými slovami, keď si zoberieme hocijakú hranu e zo stromu krabíc, vieme jej priradiť rez v grafe G: rez je definovaný množinou tých vrcholov z V, ktoré sú v niektorej krabici z jedného komponentu $T^{(t)}-\{e\}$. Tento rez v G musí byť minimálny $x-y$ rez pre svedkov x,y, a zároveň cena hrany e v strome $T^{(t)}$ musí byť cena tohoto rezu.
Teraz potrebujeme urobiť dve veci: jednak ukázať, že keď algoritmus skončí a platí invariant, máme dobrý Gomory-Hu strom a dvak navrhnúť iteráciu algoritmu tak, aby invariant ostával v platnosti.
Najprv si ukážeme, že ak platí invariant a každá krabica je jednoprvková, máme Gomory-Hu strom. Nech $T=(V,E')$ je strom po skončení algoritmu a nech v ňom platí invariant. Keďže každá krabica bola jednoprvková, svedkovia z invariantu sú samotné vrcholy. Potrebujeme ukázať obe vlastnosti z Definície 5. Prvá vlastnosť, $\omega'(e)=\partial_G(cut_T(e))$, hovorí, že váha hrany $e\in E'$ je

cena príslušného rezu v G. Z invariantu ale platí, že $cut_T(e)$ je minimálny $x-y$ rez, kde $e=(x,y)$. Zároveň invariant hovorí, že $\omega'(e) = f_G(x,y) = \partial_G(cut_T(e))$. Prvá vlastnosť z Definície 5 je preto splnená.

Druhá vlastnosť hovorí, že $f_G(u,v) = f_T(u,v)$ pre ľubovoľné dva vrcholy $u,v \in V$. Ak $(u,v) \in E'$, vlastnosť vyplýva priamo z invariantu: keďže u,v sú spojené hranou v strome T, je $f_T(u,v) = \omega'((u,v)) = f_G(u,v)$. Nech teda u,v nie sú spojené hranou v T. Keďže T je strom, je v ňom práve jedna $u-v$ cesta $u=w_0,w_1,\dots,w_z=v$ a minimálny $u-v$ rez v T je hrana s minimálnou váhou na nej. Označme túto hranu $e_{\min} = (w_i,w_{i+1})$, t.j. chceme ukázať $f_G(u,v) = \omega'(e_{\min})$.

Na jednej strane, v $T-\{e_{\min}\}$ sú w_i a w_{i+1} v rôznych komponentoch, a teda aj u a v sú v rôznych komponentoch. Preto $cut_T(e_{\min})$ je rez v G, ktorý oddelí u od v, a teda $\partial_G(cut_T(e_{\min})) \geq f_G(u,v)$. Z predchádzajúcich úvah ale vieme, že $\partial_G(cut_T(e_{\min})) = \omega'(e_{\min})$, a tak sme ukázali, že $\omega'(e_{\min}) \geq f_G(u,v)$.



Vľavo je graf $G=(V,E)$, vpravo jeho Gomory-Hu strom T. Medzi vrcholmi u, v je v T jediná cesta a na nej je hrana $e_{\min}$. Odstránením hrany $e_{\min}$ z T dostaneme rozklad V na dve množiny, a teda rez v G. Vieme, že cena hrany $e_{\min}$ v T je veľkosť minimálneho rezu G medzi koncovými vrcholmi $e_{\min}$. Teraz sa pokúšame ukázať, že tento rez je zároveň minimálny $u-v$ rez.

Na to, aby sme ukázali opačnú nerovnosť, t.j. $\omega'(e_{\min}) \leq f_G(u,v)$, si pomôžeme nasledovnou lemou:

Lema 6. *Majme graf $G=(V,E)$ a nech $\{v_1,v_2,\dots,v_z\} \subseteq V$. Potom*

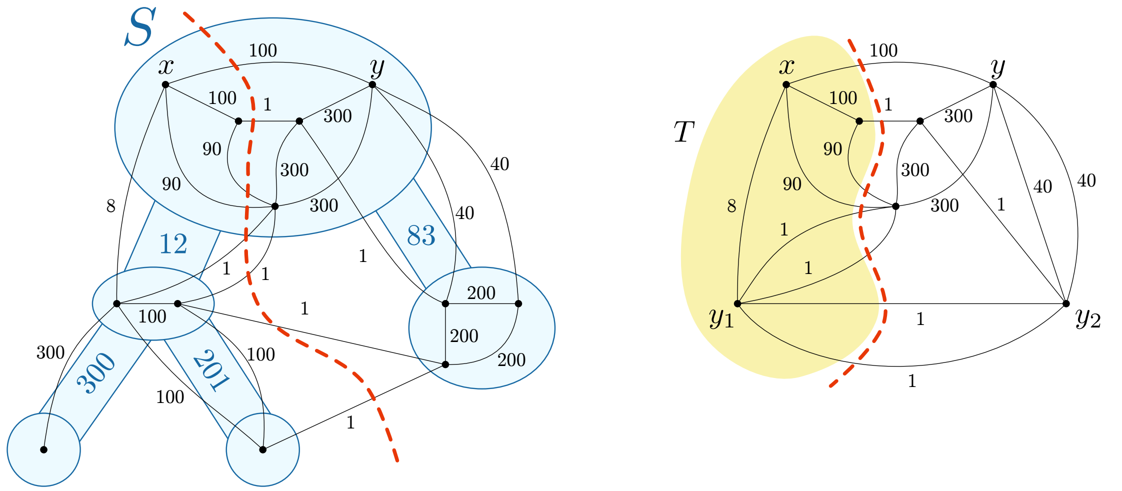
$$f_G(v_1,v_z) \geq \min\{f_G(v_1,v_2), f_G(v_2,v_3), \dots, f_G(v_{z-1},v_z)\}.$$

Dôkaz: Urobíme indukciu na z. Pre $z=2$ lema triviálne platí. Ak $z>2$, z indukčného predpokladu vieme, že $f(v_2,v_z) \geq \min\{f(v_2,v_3),\dots,f(v_{z-1},v_z)\}$. Preto nám stačí ukázať, že $f(v_1,v_z) \geq \min\{f(v_1,v_2), f(v_2,v_z)\}$. Predpokladajme sporom, že $f(v_1,v_z) < \min\{f(v_1,v_2), f(v_2,v_z)\}$ a nech C je minimálny v_1-v_z rez v G. Bez ujmy na všeobecnosti, nech v_2 je na rovnakej strane rezu, ako v_1 (ináč premenujeme v_1 a v_z a máme symetrickú situáciu). C je zároveň v_2-v_z rez, a preto $f(v_2,v_z) \leq f(v_1,v_z)$, spor. □

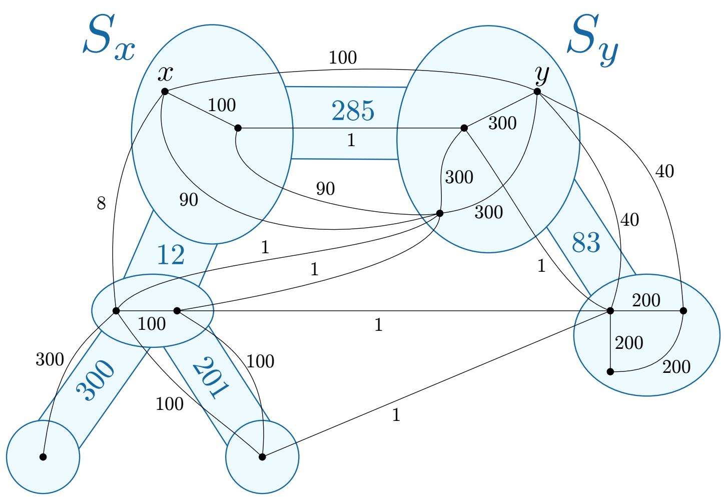
Teraz vieme, že $f_G(u,v) \geq \min\{f_G(w_0,w_1), f_G(w_1,w_2),\dots,f_G(v_{z-1},w_z)\}$. Zároveň, pretože $(w_i,w_{i+1}) \in E'$, z predchádzajúcich úvah vieme, že $f_G(w_i,w_{i+1}) = \omega'((w_i,w_{i+1}))$, a teda

$$f_G(u,v) \geq \min\{\omega'(w_0,w_1),\dots,\omega'(w_{z-1},w_z)\} = \omega'(e_{\min}).$$

Teraz, keď už vieme, že ak po skončení algoritmu invariant platí, tak máme dobrý Gomory-Hu strom, poďme navrhnúť algoritmus tak, aby invariant ostával v platnosti. Ako sme už povedali, v jednej iterácii si algoritmus vyberie krabicu S (ľubovoľnú) s aspoň dvoma vrcholmi x a y (ľubovoľnými) a rozdelí S na dve menšie krabice. Toto rozdelenie sa urobí takto: zakoreníme strom $T^{(t)}$ v S a nech $T_1,\dots,T_z$ sú podstromy synov S. Pre podstrom T_i označme V_i tie vrcholy grafu G, ktoré sú v niektorej krabici z tohto podstromu, t.j. $V_i := \{v \in V \mid \exists S' \in T_i :\ v \in S'\}$. Z G zostrojíme graf G' tak, že vrcholy z V_i sa stotožnia a nahradia sa novým vrcholom y_i, pričom hrany ostanú (t.j. nový graf môže mať násobné hrany). V grafe G' nájdeme minimálny $x-y$ rez T. Krabicu S nahradíme dvoma krabicami $S_x := S \cap T$, $S_y := S - S_x$. Do stromu pridáme hranu spájajúcu S_x a S_y s cenou $\partial_G(T)$. Podstromy T_i, pre ktoré $y_i \in T$, budú susediť s S_x, zvyšné podstromy s S_y.



Vľavo je stav na začiatku iterácie: máme štyri krabice pospájané hranami do stromu (modré čísla sú váhy ω' v $T^{(t)}$, čierne sú pôvodné váhy ω v G). Jednu krabicu S sme vybrali za koreň a vybrali dva ľubovoľné vrcholy $x, y \in S$. S má dvoch synov a príslušné podstromy skontrahujeme do dvoch vrcholov; dostaneme tak graf vpravo, v ktorom nájdeme minimálny $x - y$ rez T.

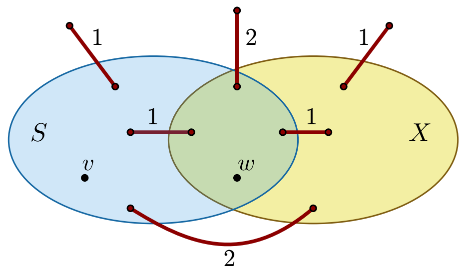


Nájdený rez jednak definuje, ako rozdeliť S na S_x a S_y, a zároveň určuje, ktorý podstrom bude kam patriť.

Na záver rozprávania o Gomory-Hu stromoch potrebujeme ukázať, že takto definovaný spôsob rozbíjania krabíc zachováva v platnosti invariant, teda že ak na začiatku iterácie invariant platil, bude platiť aj po jej skončení. Zjavne pre hrany stromu, ktoré sú v niektorom podstrome T_i, sa počas iterácie nič nezmenilo: svedkovia ostali, váha hrany aj rez ňou definovaný sa taktiež nezmenili. Pre hrany, ktoré v pôvodnom strome boli incidentné s S sa nezmenila váha, ani hodnota rezu, ale mohlo sa stať, že po rozdelení S sa jeden svedok stratil a budeme musieť nájsť iného. Napokon treba ukázať platnosť invariantu pre novú hranu (S_x, S_y). V tom všetkom nám viackrát pomôže nasledovná lema:

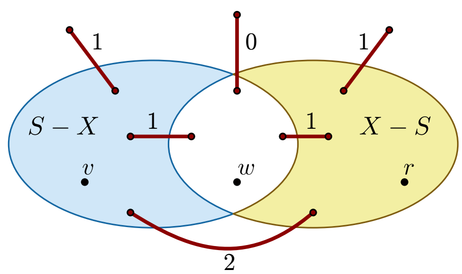
Lema 7. *Majme graf $G = (V, E)$ a nech $S \subseteq V$ je nejaký minimálny $r - s$ rez pre $r, s \in V$, pričom $s \in S$. Ďalej, nech $v, w \in S$ sú dva ľubovoľné vrcholy. Potom existuje minimálny $v - w$ rez T v G taký, že $T \subset S$.*

Dôkaz: Zoberme si nejaký minimálny $v - w$ rez X. Ak $X \subset S$ (alebo $V - T \subset S$), niet čo dokazovať. Takže predpokladajme, že $S \cap X \neq \emptyset$ a uvažujme výraz $A := \partial(S) + \partial(X)$. Podľa príslušnosti koncových vrcholov do S a X máme 6 typov hrán, ktoré prispievajú do A. V nasledujúcom obrázku je pre každý typ hrán uvedená násobnosť, t.j. napríklad každá z hrán medzi $S - X$ a $X - S$ je zarátaná dvakrát (raz v $\partial(S)$ a raz v $\partial(X)$), každá z hrán medzi $S - X$ a $S \cap X$ sa zarátava raz (v $\partial(X)$) atď.



Rozlíšme teraz dva prípady:

1. $r \in X$**.** Budeme uvažovať výraz $B := \partial(S - X) + \partial(X - S)$ a podobne ako pre výraz A, aj teraz sa pozrime, ktoré hrany sa koľkokrát započítajú:

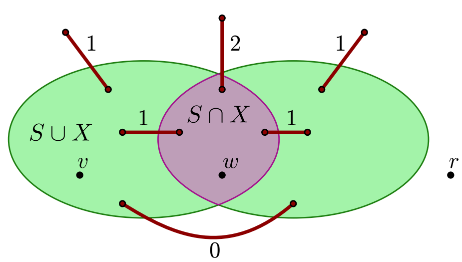


Porovnaním počtov zarátaných hrán vidíme, že $B \leq A$, t.j.

$$\partial(S - X) + \partial(X - S) \leq \partial(S) + \partial(X).$$

Zároveň, pretože $s \in S$, $X - S$ je $r - s$ rez, a keďže S je minimálny $r - s$ rez, platí $\partial(X - S) \geq \partial(S)$. Odtiaľ potom dostávame $\partial(S - X) \leq \partial(X)$. Lenže X aj $S - X$ sú $v - w$ rezy, a navyše X je minimálny $v - w$ rez. Preto $S - X$ je minimálny $v - w$ rez, pre ktorý platí $S - X \subset S$.

2. $r \notin X$**.** Postup bude analogický ako v predchádzajúcom prípade, iba teraz budeme uvažovať výraz $B' := \partial(S \cup X) + \partial(S \cap X)$.



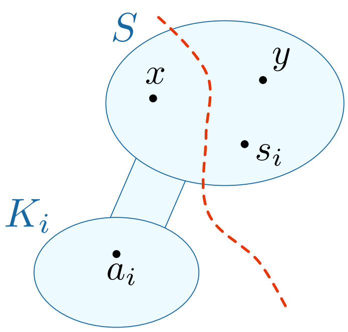
Porovnaním opäť vidíme $B' \leq A$, t.j.

$$\partial(S \cup X) + \partial(S \cap X) \leq \partial(S) + \partial(X).$$

Pretože $r \notin S \cup X$, je $S \cup X$ $r - s$ rez, a preto $\partial(S \cup X) \geq \partial(S)$. Z predchádzajúcej nerovnosti potom máme $\partial(S \cap X) \leq \partial(X)$, takže $S \cap X$ je minimálny $v - w$ rez obsiahnutý v S. $\square$

Majme teraz jednu iteráciu Gomory-Hu algoritmu, ktorá rozdelila krabicu S na krabice S_x a S_y. Ukážeme, že pre novú hranu $e' = (S_x, S_y)$ platí invariant. Rez definovaný hranou e' je rez, ktorý vznikol z minimálneho $x-y$ rezu v G' a $\omega'(e')$ je jeho cena. Stačí nám teda ukázať, že minimálny $x-y$ rez v G' je zároveň (po expandovaní vrcholov y_i) minimálny $x-y$ rez v G; inými slovami, minimálny $x-y$ rez v G nerozdelí vrcholy patriace do jedného podstromu T_i.

Nech $K_1, \ldots, K_z$ sú synovia S (t.j. korene podstromov $T_1, \ldots, T_z$) a nech $a_i \in K_i$, $s_i \in S$ sú príslušní svedkovia. Hrana (S, K_1) definuje rez v G, v ktorom na jednej strane sú vrcholy podstromu T_1, na druhej strane všetky ostatné vrcholy, vrátane x a y. Pretože tento rez je zároveň minimálny $a_1 - s_1$ rez, z Lemy 7 dostaneme, že v G existuje $x-y$ rez, ktorý nerozdelí vrcholy podstromu T_1. Iterovaním tohto argumentu pre ostatné podstromy dostaneme požadované tvrdenie.



Posledná vec, ktorú potrebujeme ukázať, sa týka hrán (S, K_i). Na začiatku iterácie boli svedkovia $a_i \in K_i$, $s_i \in S$, ktorí dosvedčili platnosť invariantu. Bez ujmy na všeobecnosti, nech po skončení iterácie sa z hrany (S, K_i) stala hrana (S_x, K_i). Ak $s_i \in S_x$, invariant zjavne ostáva v platnosti. Mohlo sa ale stať, že $s_i \in S_y$. V tom prípade zoberieme za nového svedka x a ukážeme, že $f_G(a_i, x) = f_G(a_i, s_i)$.
Na jednej strane, pretože rez definovaný hranou (S, K_i) je minimálny a_i, s_i rez v G, a zároveň oddeľuje a_i od x, platí $f_G(a_i, x) \le f_G(a_i, s_i)$.

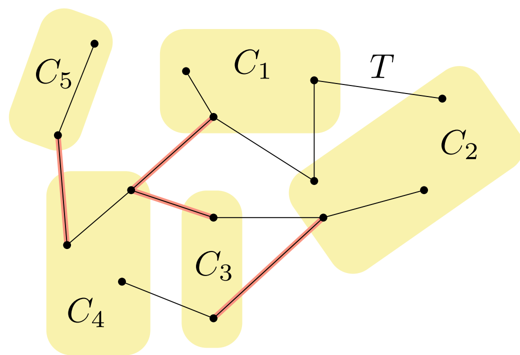
Aby sme ukázali opačnú nerovnosť, vyrobme z G pomocný graf $\hat{G}$, v ktorom skontrahujeme S_y do jedného vrchola $\hat{y}$. Pretože S_x a S_y vznikli podľa minimálneho $x-y$ rezu, môžme použiť Lemu 7 a argumentovať, že $f_G(a_i, x) = f_{\hat{G}}(a_i, x)$. Zároveň z Lemy 6 vieme, že $f_{\hat{G}}(a_i, x) \ge \min\{f_{\hat{G}}(x, \hat{y}), f_{\hat{G}}(a_i, \hat{y})\}$. Z minimálneho $a_i - \hat{y}$ rezu v $\hat{G}$ expandovaním $\hat{y}$ vznikne nejaký $a_i - s_i$ rez v G, a preto $f_{\hat{G}}(a_i, \hat{y}) \ge f_G(a_i, s_i)$. Z rovnakých dôvodov platí $f_{\hat{G}}(x, \hat{y}) \ge f_G(x, y)$; zároveň ale minimálny $x-y$ rez v G oddeľuje a_i a s_i, preto $f_G(x, y) \ge f_G(a_i, s_i)$, takže aj $f_{\hat{G}}(x, \hat{y}) \ge f_G(a_i, s_i)$.

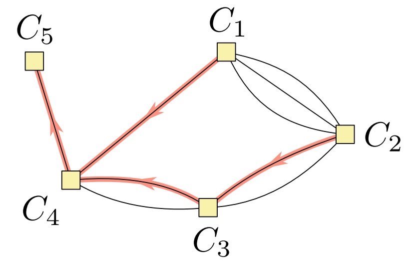
Naspäť k Min-k-Cut

Uvažujme nasledovný jednoduchý algoritmus: pre daný graf $G = (V, E)$ zostroj Gomory-Hu strom T. Zober $k-1$ najlacnejších hrán z T, T sa tak rozpadne na k súvislých komponentov. Tieto komponenty vráť ako riešenie problému Min-k-Cut. Ukážeme, že tento algoritmus je $2\left(1 - \frac{1}{k}\right)$-aproximačný.

Nech hrany T majú váhy $\omega'(e'_1) \le \omega'(e'_2) \le \cdots \le \omega'(e'_{n-1})$ a nech $C_1, \ldots, C_k$ sú komponenty súvislosti optimálneho riešenia, pričom $\partial(C_1) \le \partial(C_2) \le \cdots \le \partial(C_k)$. Z definície Gomory-Hu stromu, $\omega'(e'_i) = \partial_G(cut_T(e'))$, t.j. cena hrany v T je cena príslušného rezu v G. Keďže algoritmus zoberie zjednotenie prvých $k-1$ rezov, môže sa stať, že niektoré hrany patria do viacerých rezov, ale v každom prípade pre cenu algoritmu platí $ALG \le \sum_{i=1}^{k-1} \omega'(e'_i)$. Na druhej strane, pre cenu optimálneho riešenia platí $2 \cdot OPT = \sum_{i=1}^{k} \partial_G(C_i)$. Naším cieľom bude nájsť nejakých $k-1$ hrán v T tak, že i-ta nájdená hrana má cenu nanajvýš $\partial_G(C_i)$. Ak sa nám to podarí, budeme vedieť, že $ALG \le \sum_{i=1}^{k-1} \partial_G(C_i)$, lebo algoritmus vyberá $k-1$ najlacnejších hrán z T. Zvyšné argumenty sú potom rovnaké ako v prípade Min-Multiway-Cut.

Zoberme si strom T a skontrahujme každý komponent C_i do jedného vrchola. Takto vzniknutý graf T' môže mať cykly aj násobné hrany.





Vyhoďme z T' hrany tak, aby ostal strom T'' a zakoreňme ho v C_k. Pre každý vrchol C_i, $i = 1, \ldots, k-1$ zoberme hranu e'_{h_i}, ktorá ide k jeho rodičovi v T''; dostali sme $k-1$ hrán z T. Ukážeme, že $\omega'(e'_{h_i}) \leq \partial_G(C_i)$, čím sa celý dôkaz skonči. Hrana $e'_{h_i} = (u, v)$ má jeden koncový vrchol v C_i a druhý mimo C_i. $\omega'(e'_{h_i})$ je cena minimálneho $u - v$ rezu v G. Ale C_i tiež oddeľuje u od v, a preto $\omega'(e'_{h_i}) \leq \partial_G(C_i)$.