Asymptotická notácia

Definícia 1 *Majme dve funkcie* $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*. Potom*

$$\begin{aligned}
f \in O(g) &\iff \exists c > 0,\ \exists x_0 \geq 1,\ \forall x \geq x_0 :\ f(x) \leq c \cdot g(x) \\
f \in o(g) &\iff \forall c > 0,\ \exists x_0 \geq 1,\ \forall x \geq x_0 :\ f(x) < c \cdot g(x) \\
f \in \Omega(g) &\iff \exists c > 0,\ \exists x_0 \geq 1,\ \forall x \geq x_0 :\ f(x) \geq c \cdot g(x) \\
f \in \omega(g) &\iff \forall c > 0,\ \exists x_0 \geq 1,\ \forall x \geq x_0 :\ f(x) > c \cdot g(x) \\
f \in \Theta(g) &\iff f \in O(g) \cap \Omega(g)
\end{aligned}$$

Namiesto $f \in O(g)$ niekedy píšeme $f(n) \in O(g(n))$, prípadne $f(n) = O(g(n))$. Táto notácia, hoci syntakticky nesprávna, častokrát umožňuje prehľadnejší zápis, napr. môžeme písať $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$, alebo $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Zrejmý fakt 1 *Nech* $f_1 = O(g_1),\ f_2 = O(g_2)$ *a* $k \in \mathbb{R}^+$*. Potom*

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 &= O(\max(g_1, g_2)) \\
f_1 f_2 &= O(g_1 g_2) \\
k \cdot f_1 &= O(g_1)
\end{aligned}$$

Zrejmý fakt 2 *Nech* $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sú také, že existuje* $L := \lim_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$*. Potom*

$$\begin{aligned}
f = o(g) &\iff L = 0 \\
f = O(g) &\iff L \in \mathbb{R},\ L \geq 0 \\
f = \omega(g) &\iff L = \infty \\
f = \Omega(g) &\iff L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ L > 0
\end{aligned}$$